Abb. 50: »Ceci n'est pas un groupe«.
Warum Anja, Bert, Cecile und David keine mathematische Gruppe bilden.
Fotografie: Doktoranden der HGS MathComp, Heidelberg 2017.

Michael Winckler *(Mathematatik)*

Mathematik

Eine Sprache und ihre Schrift

Viele Schwierigkeiten in der gesellschaftlichen Akzeptanz der Mathematik beruhen nicht nur auf ihrer Komplexität und strengen Logik, sondern zu einem bedeutenden Teil auch auf ihrer eigenen Sprache und Schrift. Die Verwendung eigener Fachbegriffe, die in der Alltagssprache eine andere Bedeutung haben (wie ›Ring‹ oder ›Körper‹) und eine damit verbundene Symbolik, die im Alltagsrechnen nicht vorkommt (wie im Ausdruck »a ° b = c«), führen zum Gefühl, dass Mathematik schwer verständlich und esoterisch sei. Warum macht die Mathematik es den Menschen so schwer, sie zu verstehen? Drei wesentliche Aspekte spielen hier eine Rolle.

Erstens ist die mathematische Sprache fiktional: Die von ihr beschriebenen ›Gegenstände‹ sind nicht real-wirkliche Dinge, sondern Gedankenkonstrukte. Der fehlende Bezug zu realen Beispielen ist keine Nachlässigkeit — er ist gewollt! Was oft als abgehoben und akademisch verstanden wird, gehört zum Wesen der Mathematik: Allein durch logisches Ableiten aus Grundannahmen (Axiomen) werden immer komplexere mathematische Modelle erstellt. Deren Eigenschaften sollen nicht aus Analogie zu Beispielen bestimmt werden, sondern sie leiten sich ab aus Sätzen und Definitionen, die über logische Beweise verbunden werden. So ist der Weg in die Praxis sogar umgekehrt: Zu neuen mathematischen Modellen werden erst später Anwendungen gefunden. Ist eine solche Anwendung zulässig, so können die in der mathematischen Theorie abgeleiteten Eigenschaften übertragen werden. Allerdings betrachten Mathematiker Anwendungen mit Skepsis, denn dort gemachte Beobachtungen lassen sich nicht direkt auf das Modell übertragen — sie müssen zunächst mathematisch verifiziert werden.

Zum zweiten ist mathematische Theorie exakt — und diese Eigenschaft findet ihren Niederschlag in der verwendeten Sprache. In den Sätzen »Ist die Klausur am Donnerstag oder Freitag?« und »Magst du Milch oder Zucker in den Kaffee?« wird das Wort ›oder‹ unterschiedlich verwendet. Im ersten Fall wird implizit die Antwort »Donnerstag *und* Freitag« ausgeschlossen, während im zweiten Beispiel ›beide‹ eine statthafte Antwort ist. In der Mathematik hat ›oder‹ die feste Bedeutung, die Zulässigkeit beider genannten Antwortmöglichkeiten einzuschließen. Soll dies ausgeschlossen werden, so ist zwingend die Verwendung von ›entweder … oder‹ notwendig. So lässt die Mathematik keinen Spielraum für Interpretation — ein Umstand, auf dem viele Mathematikerwitze basieren, denn diese feste Verankerung einer Wortbedeutung gemäß mathematischer Definition ist in einer natürlichen Sprache sehr unüblich. Oft schöpfen gesellschaftliche Beziehungen ihren Reiz gerade aus einer Ambivalenz des gesprochenen Worts.

Zum dritten verwendet die Mathematik in ihrer Sprache Worte des Alltags, die sie mit einer oft naheliegenden, aber ganz genau definierten Bedeutung versieht. Dabei darf sich der Mathematiker nicht von der weitläufigen Bedeutung des gleichen Wortes in der Umgangssprache ablenken lassen — so hat das Fachwort ›Körper‹ im Gebiet der Algebra wenig mit geometrischen Körpern zu tun. Auch werden neue Wörter erfunden, um spezielle Modellvarianten zu kennzeichnen (z. B. ›Abelsche Gruppe‹). Schauen wir uns die Sprache der Mathematik an einem Beispiel an (*mathematische Termini* wurden zur Abgrenzung kursiv gesetzt). Ein zentraler Begriff der Algebra ist die *Gruppe*. Schon das verwendete Wort gibt hier Möglichkeiten zur Fehlinterpretation: Was landläufig als Gruppe bezeichnet wird (eine Baumgruppe) ist für den Mathematiker meist eine *Menge*: Eine Ansammlung von Objekten. Eine *Gruppe* hingegen ist eine Menge, auf der es zudem eine *Verknüpfung* gibt. Diese *Verknüpfung* definiert für zwei beliebige *Elemente* der Gruppe ein Ergebnis. Mathematiker sind an Strukturen mit besonderen Eigenschaften interessiert. Bei einer *Gruppe* muss die *Verknüpfung* folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Das Ergebnis der *Verknüpfung* muss wieder aus der *Gruppe* stammen.
2. Es kommt nicht darauf an, in welcher Reihenfolge man Teilergebnisse berechnet.
3. Es existiert ein *neutrales Element*, das andere Elemente nicht verändert.
4. Zu jedem Element gibt es ein *inverses Element*. Verknüpft man diese beiden, ist das Ergebnis das *neutrale Element*.

Beispielsweise bilden die *Ganzen Zahlen* mit der *Addition* als Verknüpfung eine *Gruppe*: Die Summe ist wieder eine *ganze Zahl*, man kann »(a+b)+c« oder »a+(b+c)« rechnen, die Zahl »0« ist das *neutrale Element* und für »-3« beispielsweise ist »3« das *inverse Element*. Interessant wird es nun, wenn wir andere Gruppenstrukturen (er)finden: Als *Grundmenge* einer *Gruppe* verwenden wir: {Anja, Bert, Cecile, David}. Als Verknüpfung betrachten wir Gesprächsthemen: »Wenn Bert bei Cecile im Auto mitfährt, unterhalten sie sich über David«. Wir schreiben das so: »Bert ° Cecile = David«. Die Gesprächsthemen kann man in einer Tabelle erfassen.

°	*Anja*	*Bert*	*Cecile*	*David*
Anja	Anja	Bert	Cecile	David
Bert	Bert	Anja	David	Cecile
Cecile	Cecile	David	Bert	Cecile
David	David	Cecile	Cecile	Anja

Übrigens: Um eine *Gruppe* zu erzeugen, ist es auch notwendig, Verknüpfungen wie »Anja ° Anja« zu definieren. Im Beispiel hieße das, dass Anja allein im Auto fährt und Selbstgespräche führt — mit sich selbst als einzigem Thema. Die Frage ist nun: Ist das eine *Gruppe*? Sind also die *Gruppeneigenschaften* erfüllt?

Eigenschaft 1 ist erfüllt, denn die Gesprächsthemen sind allesamt aus der *Gruppe*. Etwas wie »Bert ° Cecile = Egon« kommt nicht vor.
Eigenschaft 3 ist auch erfüllt: Anja ist das *neutrale Element*: Wenn Anja sich mit jemandem unterhält, ist immer dieser andere das Thema. Das kann man aus Zeile 1 und Spalte 1 erkennen.
Eigenschaft 4 ist allerdings nicht erfüllt: Cecile hat keinen Gesprächspartner, mit dem sie über Anja (das *neutrale Element*) spricht.
Auch Eigenschaft 2 ist nicht erfüllt. Das ist allerdings wesentlich schwerer zu sehen. Man muss ein Gegenbeispiel finden:
[P1] (Bert ° David) ° Cecile = Cecile ° Cecile = Bert
[P2] Bert ° (David ° Cecile) = Bert ° Cecile = David

Bei dieser Rechnung entstehen also je nach Klammerung zwei verschiedene Ergebnisse — und somit unterscheidet sich das Ergebnis der Rechnung je nach Reihenfolge der Rechenschritte, was nicht sein soll. Gibt es eine Möglichkeit, die Tabelle so zu füllen, so dass eine *Gruppe* mit vier Elementen entsteht? In der Tat gibt es sogar genau zwei strukturell unterschiedliche Möglichkeiten, eine Gruppe zu bilden. Es ergeben sich die zwei (einzigen!) *Gruppen* mit vier Elementen: Die *zyklische Gruppe* und die *Kleinsche Vierergruppe*.

Hier endet der kleine Diskurs in die Mathematik. Ein einziges mathematisches Symbol (›°‹) hat eventuell schon ausgereicht, um manchen Nicht-Mathematiker abzuschrecken. Und doch hat (und ist) die Mathematik eine Sprache, die zum Studium einlädt!

Literatur

Behrends, Ehrhard (2006), *5 Minuten Mathematik: 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT*, Wiesbaden.

Zum Autor

Michael Winckler ist Geschäftsführer des Interdisziplinären Zentrums für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) und der Heidelberger Graduiertenschule der mathematischen und computergestützten Methoden für die Wissenschaften (HGS MathComp) der Universität Heidelberg. Seine Forschungsschwerpunkte sind Numerische Methoden bei Gewöhnlichen Differentialgleichungen, Nichtlineare Optimierung, Mathematische Methoden für Origami und Wissenschaftliches Rechnen in den Geisteswissenschaften.